ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОГЛОЩЕНИЯМ

Шыхыев Р. М.
e-mail: raximm82@mail.ru
Каракалпакский государственный университет имени Бердаха

Постановка задачи. В настоящей работе в области $Q = \left\{(t,x): \ \ t>0, \ x \in R^N\right\}$ изучается свойство решений задачи Коши для нелинейного параболического уравнения, описывающего диффузию тепла в среде с нелинейным объемным стоком или поглощением [1]

$$A\,(u) \equiv u_t - \nabla(|x|^m\, u^\sigma \nabla u) + \varepsilon\gamma(t,x)u^\beta = 0, t>0, x \in R^N, \tag{1}$$

$$u\,(0,x) = u_0\,(x) \geqslant 0, x \in R^N, \sup u_0 < \infty. \tag{2}$$

Здесь $t \geqslant 0$ и $x \in R^N$ - соответственно временные, пространственные координаты, $\nabla(.) - grad_x(.) \beta > 0, \ \beta \neq 0$ - фиксированная постоянная, $0 < \gamma(t,x) \in C(Q)$. Относительно начальной функций u в (2) предполагается, что $|x|^m\, u_0^\sigma \frac{\partial u_0}{\partial x} \in C\,(Q)\,, u_0(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$. Ограниченное решение задачи (1), (2) существует, единственно и является классическим в любой области вида $[\tau, +\infty) \times R^N, \tau > 0$. Отметим, что свойства решений уравнения (1) когда в [2] $m = 0, \gamma(t) = const, \beta > 1, \varepsilon = \pm 1$ подробно изучен.

Основные результаты. Ниже исследуем радиально симметричные автомодельные, приближенно-автомодельные решения уравнения (1) следующего вида:

$$\begin{gathered} A_R(\theta_A) \equiv \xi^{1-s} \tfrac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}\theta_A^\sigma\left(\tfrac{d\theta_A}{d\xi}\right)\right) + \\ + \tfrac{1}{2}\theta'_A\xi + \gamma\,(t)\,\tau\,(t)\,\bar{u}^{\beta-(\sigma+1)}\left(\theta_A - \theta_A^\beta\right) = 0, \xi > 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} u_A\,(t,x) = \left[\tfrac{\beta-1}{\alpha+1}\,(T+t)^{\alpha+1}\right]^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta_A\,(\xi)\,, \quad \xi = \tfrac{\varphi(x)}{[\tau(t)]^{\frac{1}{2}}}, \\ \varphi\,(x) = \tfrac{2}{2-m}\,|x|^{\frac{2-m}{2}}\,, \ \tau\,(t) = \int \bar{u}^\sigma\,(t)\,dt, \quad s = \tfrac{2N}{2-m}, \end{gathered} \tag{4}$$

$\bar{u}\,(t)$ определяется как решение уравнения

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\,(T+t)^\alpha\,\bar{u}^\beta.$$

Тогда θ_A удовлетворяет приближенно автомодельному уравнению. $T \geqslant 0$ - произвольная постоянная, а функция $\theta_A\,(\xi) > 0$ является приближенно автомодельным решением уравнения построенное методом нелинейного расщепления и эталонных уравнений.

В частном случае, когда $\gamma\,(t) = (T+t)^\alpha$, то

$$\tau\,(t) = \begin{cases} \left(\frac{\beta-1}{\alpha+1}\right)^{-\frac{\sigma}{\beta-1}}\frac{\beta-1}{\beta-1-(\alpha+1)(\sigma+1)}\,(T+t)^{\frac{\beta-1-(\alpha+1)(\sigma+1)}{\beta-1}}\,, & \text{если } \beta \neq 1-(\alpha+1)\,(\sigma+1)\,, \\ \sigma^{-\frac{1}{\alpha+1}}\ln\,(T+t)\,, & \text{если } \beta = 1-(\alpha+1)\,(\sigma+1)\,, \end{cases}$$

а $\bar{u}(t) = \left(\frac{\beta-1}{\alpha+1}(T+t)^{\alpha+1}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}}$ уравнение (1) становится автомодельной

$$\begin{aligned} A_R(\theta_A) \equiv \tfrac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}\theta_A^{\sigma}\left(\tfrac{d\theta_A}{d\xi}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\theta_A'\xi + \\ + \tfrac{\alpha+1}{\beta-1-(\alpha+1)(\sigma+1)}\left(\theta_A - \theta_A^{\beta}\right) = 0, \xi > 0, \end{aligned} \tag{5}$$

которое допускает автомодельное решение вида

$$\theta_A(\xi) = \bar{\theta}(\xi)\,\omega(\tau)\,, \bar{\theta}(\xi) = A\left(a-\xi^2\right)_+^{\frac{1}{\sigma}}, \tau = -\ln\left(a-\xi^2\right). \tag{6}$$

Тогда вычисление показывает, что для $\omega(\tau)$ из (5) получим уравнение

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{d\tau}\left(\omega^{\sigma}\left(\omega_\tau - \tfrac{1}{\sigma}\omega\right)\right) + \left(s\tfrac{e^{-\tau}}{2(a-e^{-\tau})} - \tfrac{1}{\sigma}\right)\omega^{\sigma}\left(\omega_\tau - \tfrac{1}{\sigma}\omega\right) + \tfrac{1}{4A^{\sigma}}\left(\omega_\tau - \tfrac{1}{\sigma}\omega\right) + \\ + \tfrac{\alpha+1}{\beta-1-(\alpha+1)(\sigma+1)}\tfrac{1}{4}\left(\omega\tfrac{e^{-\tau}}{A^{\sigma}(a-e^{-\tau})} - A^{\beta-1-\sigma}\tfrac{e^{-\tau}}{(a-e^{-\tau})}e^{-\tau\frac{\beta-1}{\sigma}}\omega^{\beta}\right) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

из которого видно, что $\omega \to \left(\frac{\sigma}{4A^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ при $\tau \to +\infty,\ \xi \to \pm\sqrt{a}$, т.е. при $|x| \to \pm\sqrt{a}\,[\tau(t)]^{\frac{1}{2}}$.

Литература

[1] Галактионов В. А., Курдюмов А. П., Самарский А. А. Об асимптотической устойчивости инвариантных решений нелинейных уравнений теплопроводности с источником.- Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, №4, С. 614 -632.

[2] Шыхыев Р.М. Асимптотическое поведение автомодельных решений одной системы возникающих квазилинейных уравнений параболического типа. Вестник НУУз. Ташкент 2010. Том №3. С. 231-235.